А. В. Зелевинский

С Беллой Абрамовной Субботовской меня познакомил Дмитрий Борисович Фукс. Произошло это, по-видимому, летом или ранней осенью 1980-го года. Она предложила мне участвовать в работе созданного ей «Народного Университета», и я помню, что согласился, долго не раздумывая. Рискованность этого предприятия была очевидна (даже мне, при моей тогдашней молодости и легкомыслии), так что столь быстрое согласие было не совсем тривиальным. Причин было две: ощущение «правильности» всей затеи, и чувство абсолютного доверия, которое сразу же вызвала у меня Белла Абрамовна, и которое никогда не покидало меня в течение нашего (к сожалению, недолгого) знакомства и общения.

Несколько слов о подоплеке. В те годы, обстановка глубокого маразма, царившего в советском обществе, была настолько очевидна людям моего круга общения, что и в обсуждениях не нуждалась. Самые людоедские времена советского режима остались позади, официальную идеологию мало кто принимал всерьез, но открытое инакомыслие по-прежнему каралось. Официальный антисемитизм процветал и накладывался на насаждавшиеся на всех уровнях подозрительность и недоверие к интеллигенции и культуре. Поскольку большинство населения сформировалось уже при советской власти, режим казался незыблемым и вечным, а активные диссиденты — донкихотствующими идеалистами (как показало дальнейшее развитие событий, на самом деле, они оказались прозорливее меня и моих друзей).

Однако ближе к делу. В начале восьмидесятых годов малейшего подозрения на еврейское происхождение было достаточно, чтобы человек практически лишался шансов на поступление на мехмат. А заодно, для пущего абсурда, многим сильным выпускникам ведущих математических школ, зачастую даже отличившимся на математических олимпиадах разных уровней, также ставились палки в колёса, независимо от национальности. При этом, хотя в результате основанной на тех же принципах кадровой политики, уровень преподавателей мехмата к тому времени сильно снизился, от прежних времен там всё еще оставалось достаточно много математиков и педагогов высокого класса. Одним из самых важных достоинств мехмата оставалась традиционная система фундаментального математического образования на младших курсах. Не получив доступа к этой системе, для многих из самых способных и всерьез увлеченных математикой ребят дорога к профессии математика была если не полностью перекрыта, то, по крайней мере, сильно усложнена.

Идея Беллы Абрамовны и ее единомышленников была благородна и проста: попытаться хотя бы частично восстановить справедливость, предоставив ребятам, серьезно интересующимся математикой, возможность получить то фундаментальное математическое образование, в котором им было отказано. У меня эта идея не могла не вызвать отклика, не только из очевидных моральных соображений, но и потому, что, будучи евреем и выпускником известной в те годы своим вольнодумством московской математической школы №2, мне было легко отождествить себя с моими будущими студентами (хотя мне повезло, и на моем пути к математике было намного меньше препятствий).

Из организаторов Народного Университета (общепринятого имени, мне кажется, у него не было; из других бытовавших имен, помню Открытый Университет и Еврейский Университет), кроме Беллы Абрамовны, я встречал еще Бориса Каневского и Валерия Сендерова. У меня не вызывало сомнений, что все они, помимо организации наших занятий, занимались и другими «крамольными» вещами. По неписаному соглашению, я никогда не разговаривал с ними на эти темы, полагая (по всей видимости, наивно), что это может послужить защитой в случае интереса к моей особе со стороны КГБ (Комитета Государственной Безопасности; поясняю для тех счастливцев, которым этот зловещий акроним уже ничего не говорит): мол, знать ничего не знаю, попросили прочесть пару лекций по математике интересующимся молодым людям, а зачем и почему, понятия не имею. Подозреваю, что подобную «страусиную» позицию разделяли и многие мои коллеги по преподаванию в Народном Университете. Соглашение это соблюдалось с большим тактом со стороны Беллы Абрамовны и Бориса Каневского, с которыми я в основном имел дело (Сендеров, насколько я помню, появлялся на наших занятиях нечасто и особого участия в их организации не принимал; может быть, это относилось только к нашему потоку). Единственным исключением, которое я сейчас могу припомнить, был вечер барда-диссидента Петра Старчика на квартире Беллы Абрамовны, на который она пригласила мою жену и меня вместе с некоторыми студентами и преподавателями Народного Университета. Вечер, кстати, был замечательный; с биографией и творчеством Старчика можно ознакомиться, например, на страничке `http://www.bard.ru/`.

Несколько слов об организации занятий в те два года (1980–81 и 1981–82), когда я преподавал в Народном Университете. Занятия проходили раз в неделю по субботам, в разных местах: чаще всего, в Губкинском нефтяном институте (знаменитой «керосинке»), где обучалось немало наших студентов. Борис Каневский, помимо проведения семинаров по моему курсу анализа, ксерокопировал и раздавал студентам мои конспекты лекций и листочки с задачами (сейчас почти невозможно представить себе, насколько серьезным преступлением советская власть считала несанкционированное использование копировальных устройств; в соответствии с упомянутым выше соглашением, я никогда не спрашивал его, как он получил доступ к копировальной машине, и какие еще печатные материалы он на ней изготовлял). Вся остальная практическая организация работы лежала на плечах Беллы Абрамовны, которая в моих глазах всегда была душой всего предприятия. Она составляла список студентов, вела учет посещаемости, договаривалась о местах занятий, оповещала всех о возможных изменениях в расписании, следила за тем, чтобы занятия начинались и заканчивались вовремя, приносила всё необходимое для занятий (например, мел), и даже делала очень вкусные бутерброды, которые мы все вместе поедали на переменках. Всю эту немалую работу она делала с улыбкой и без видимых усилий; вообще, мне всегда казалось, что одно ее присутствие на занятиях и переменках создавало удивительно приятную, теплую и домашнюю обстановку. Преподаватели были ею освобождены от всех практических забот; при этом, само собой разумелось, что денег за работу никто никаких не получал (точно не знаю, может быть, со студентов собирались небольшие взносы на ксерокопии и тому подобные расходы).

За мои два года работы в Народном Университете, я прочел курс лекций по математическому анализу с элементами функционального анализа. Одновременно геометрию вел Фукс, а алгебру — сначала Алексей Брониславович Сосинский, а затем — мой старый друг и однокашник по школе и университету Борис Фейгин.

Над выбором программы моего курса пришлось призадуматься. С одной стороны, общий замысел состоял в том, чтобы изложить основы математического анализа, не вдаваясь особенно в более продвинутые темы. С другой стороны, большинство наших студентов в основное время обучалось на факультетах прикладной математики в добротных технических вузах, и некоторыми сведениями по анализу уже обладало, особенно на «технологическом» уровне. Поэтому строить курс на основе стандартного мехматского курса для первокурсников мне не хотелось: я боялся, что студенты быстро утратят интерес, решив, что я не сообщаю им ничего нового. Мой выход из этой дилеммы состоял в том, чтобы попытаться подать традиционные идеи в новой упаковке. В качестве такой упаковки, я использовал идеи из нескольких, в основном, французских источников: «Основы современного анализа» Ж. Дьедонне, «Дифференциальное исчисление и дифференциальные формы» А. Картана, и даже «Функции действительного переменного» Н. Бурбаки (да простит меня В. И. Арнольд). При таком подходе, элементы топологии и функционального анализа появляются довольно рано, что дает возможность изложить основы дифференциального и интегрального исчисления, работая с функциями со значениями в банаховых пространствах. Тем самым, даже знакомые стандартные факты получают неожиданное освещение, что дает студентам возможность лучше оценить и прочувствовать логику доказательств. Не мне судить об успехе этой попытки. Во всяком случае, мне казалось, что студенты воспринимали мой курс с интересом и пониманием.

Я горжусь тем, что ряд слушателей моего курса преодолели все препятствия и стали успешными математиками-профессионалами: Алексей Белов-Канель, Аркадий Беренштейн, Виктор Гинзбург (тот, что в Санта Круз), Фёдор Маликов, Андрей Резников, Михаил Шапиро... (прошу прощения, если кого-то не упомянул). Надеюсь, что в их успехах есть и мой небольшой вклад; но несравненно бо́льшим они обязаны Белле Абрамовне.

Занятия Народного Университета продолжались бесперебойно в течение нескольких лет, пока не наступила безжалостная расправа. Несколько человек, связанных с Народным Университетом, включая Каневского и Сендерова, были арестованы в июне 1982 года. А 23 сентября того же года трагически погибла Белла Абрамовна. Насколько мне известно, обстоятельства ее гибели (убийства?) не выяснены до сих пор. Могу только сказать, что с кем бы я это ни обсуждал, никто из моих друзей и коллег никогда не подвергал ни малейшему сомнению, что ее убийство было организовано КГБ. Зачем? Если власти хотели как можно быстрей и без лишнего шума прикрыть Народный Университет, то избавиться от Беллы Абрамовны, выдав ее смерть за несчастный случай, было простейшим средством этого добиться. Как я уже говорил, на ней всё держалось.

К сожалению, я почти ничего о ней не знал (и мало что узнал в течение нашего недолгого знакомства), кроме того, что она кончала мехмат и была однокурсницей Фукса. Ее теплота, сердечность и оптимизм сразу же располагали к ней и заставляли чувствовать себя с ней легко и просто. К студентам Народного Университета она относилась по-матерински и, насколько я могу судить, вызывала столь же теплое ответное отношение. Организация Народного Университета потребовала от нее большого мужества и решимости, а поддержание его на плаву требовало постоянных серьезных усилий; однако в ее поведении не было ни следа важности, позы или рисовки. На фоне всеобщей халтуры, воцарившейся в те годы в советском обществе, сам факт четкой и бесперебойной работы Народного Университета, обеспеченной усилиями Беллы Абрамовны, давал студентам (да и преподавателям тоже) важный урок профессионализма и ответственности.

Я благодарен судьбе за знакомство и сотрудничество с этой замечательной женщиной. Для меня она навсегда останется нравственным компасом, а моя работа в Народном Университете — предметом гордости и славных воспоминаний.

Приложение

Программа экзамена по математическому анализу (1 курс, 1 семестр, 1980–1981 уч. г.)

1. Язык теории множеств. Множества, функции, отношения.
2. Мощность множеств. Теоремы Кантора – Бернштейна и Кантора. Счетные и несчетные множества.
3. Вещественные числа. Аксиомы и следствия из них. Принцип Архимеда. Теорема о вложенных отрезках.
4. Комплексные числа. Теорема единственности. Геометрическая реализация.
5. Метрические пространства. Примеры и основные конструкции. Расширенная вещественная прямая.
6. Основные понятия теории метрических пространств. Шары, сферы, диаметр, ограниченность. Открытые и замкнутые множества, окрестности, замыкание и внутренность. Точки прикосновения и предельные точки.
7. Непрерывные отображения. Различные определения. Теорема о композиции. Равномерная непрерывность. Гомеоморфизм. Эквивалентные расстояния.
8. Предел отображения по подпространству. Предел последовательности. Предельные точки последовательности.
9. Последовательности Коши. Полные пространства. Геометрическое определение полноты. Примеры.
10. Полнота пространства ограниченных функций. Теорема о пополнении.
11. Предкомпактные пространства. Геометрическое определение. Основные свойства.
12. Компактнее пространства. Основные свойства. Эквивалентность трех определений.
13. Последовательность точек на компакте сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственную предельную точку. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Их свойства. Критерий сходимости числовой последовательности (совпадение верхнего и нижнего пределов).

14. Теорема о непрерывном образе компакта. Следствия. Теорема Вейерштрасса. Применения: неравенство Коши; основная теорема алгебры.
15. Непрерывность алгебраических операций.
16. Связные пространства. Связные подпространства $\mathbb{R}$. Теорема о непрерывном образе связного пространства. Теорема Больцано. Следствия.
17. Критерий связности. Линейно связные пространства. Связность произведения двух связных пространств. Негомеоморфностъ отрезка и квадрата. Связные компоненты. Открытые подмножества $\mathbb{R}$.
18. Монотонные функции. Основные свойства. Корень n-й степени.
19. Логарифмическая, степенная и показательная функции. Основные свойства.
20. Число e. Производная логарифма. Иррациональность e.

Математический анализ
(1 курс, 2 семестр, 1980–1981 уч. г.)

I. Нормированные и банаховы пространства

1. Определение нормированных и банаховых пространств. Примеры конечномерных нормированных пространств. Неравенства Минковского, Гёльдера, Юнга.
2. Примеры бесконечномерных банаховых пространств: пространства последовательностей (ℓ_p, ℓ_∞, c_0), ограниченных функций, ограниченных непрерывных отображений (доказательство его банаховости).
3. Критерий непрерывности линейного оператора. Пространство непрерывных линейных операторов. Сопряженное пространство.
4. Изоморфизм нормированных пространств. Описание конечномерных нормированных пространств. Теорема Ф. Рисса: шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен.
5. Прямая сумма нормированных пространств. Теорема Банаха об обратном отображении (без доказательства). Пространство непрерывных полилинейных отображений.

II. Ряды

6. Ряды в нормированном пространстве. Критерий Коши. Коммутативная сходимость. Абсолютная сходимость. Критерий абсолютной сходимости. Абсолютно суммируемые семейства. Свойства коммутативности и ассоциативности. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов.
7. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, эталонные ряды $\sum 1/n^\alpha$. Признаки Коши и Д'Аламбера, их сравнение, вычисление $\lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt[n]{n!}/n$.
8. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Нормальная сходимость функционального ряда. Аналитические функции в круге, их непрерывность.
9. Комплексная экспонента, ее простейшие свойства. Синус и косинус, формула Эйлера.
10. Условно сходящиеся ряды. Суммирование по частям. Признаки сходимости Дирихле и Лейбница. Теорема Абеля. Следствия из нее.

III. Дифференциальное исчисление

11. Дифференциальное исчисление для вектор-функций числового аргумента (вещественного или комплексного). Правая и левая производная. Формальные правила дифференцирования: линейность, производная произведения, производная сложной и обратной функции.
12. Теорема о конечных приращениях для всюду дифференцируемых вещественнозначных функций. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши и их следствия. Правило Лопиталя. Применения дифференциального исчисления к доказательству неравенств: неравенство о взвешенном среднем.
13. Теорема о конечных приращениях для вектор-функций. Следствия. Случай функции комплексного аргумента.
14. Теорема о дифференцируемости предела последовательности. Производная аналитической функции.
15. Сюръективность комплексной экспоненты. Число π. Корни n-й степени из комплексных чисел.

IV. Примитивные и интегралы

16. Свойство «непрерывности» производной. Определение примитивной. Теорема о примитивной предела последовательности и ее следствия.
17. Ступенчатые и правильные функции. Характеризация правильных функций. Следствия: операции над правильными функциями, свойства их примитивных.
18. Определение интеграла от правильной функции не отрезке в $\mathbb{R}$. Связь с интегралом Римана. Теорема Ньютона – Лейбница. Свойства интегралов: линейность, интегрирование по частям, замена переменной, теорема о среднем.
19. Длина кривой. Натуральный параметр. Натуральный параметр на окружности.
20. Примитивная аналитической функции. Элементарные функции и табличные интегралы. Интегрирование Функций $e^{ax}\cdot(\sin bx)^p\cdot(\cos cx)^q$. Вычисление $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$. Формула Валлиса.
21. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Комплексный логарифм. Интегрирование рациональных функций.

V. Высшие производные

22. Высшие производные. Линейность, формула Лейбница, формула интегрирования по частям n-го порядка. Приложения: примитивная функции $e^{ax}\cdot x^n$, многочлены Лежандра.
23. Выпуклые функции: определение и простейшие свойства. Критерий выпуклости. Геометрический смысл второй производной. Выпуклость e^x и еще одно доказательство неравенства о взвешенных средних.
24. Формула Тейлора: локальная форма, интегральная форма остаточного члена, оценки остаточного члена. Формула Тейлора для функций комплексного аргумента. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в степенной ряд.
25. Разложение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ в ряд Тейлора с оценкой остаточного члена. Биномиальная формула. Разложения $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$.

VI. Эйлеровы разложения

26. Эйлерово разложение $\operatorname{ctg} z$. Применение к вычислению сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2k}}$.
27. Бесконечные произведения. Критерий коммутативной сходимости. Критерии сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} R(n)$, где $R(x)$ — рациональная функция.
28. Эйлерово разложение $\sin z$. Еще одно доказательство формулы Валлиса.
29. Г-функция: формула Эйлера. Исследование $\Gamma(x)$ при $x > 0$: производные $\ln\Gamma(x)$. Константа Эйлера. Вычисление

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{a_1}{n})(1+\frac{a_2}{n})\dots(1+\frac{a_k}{n})}{(1+\frac{b_1}{n})(1+\frac{b_2}{n})\dots(1+\frac{b_k}{n})}.$$

Формула дополнения.

Математический анализ
(2 курс, 1 семестр, 1981–1982 уч. г.)

I. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

1. Определения и простейшие свойства несобственных интегралов (замена переменной, интегрирование по частям).
2. Признаки сходимости несобственных интегралов (абсолютная сходимость, принцип сравнения, эталонные функции).
3. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
4. Равномерная и нормальная сходимость несобственных интегралов по параметру. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра.
5. Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$.
6. Эйлеров интеграл для Г-функции. Интеграл Гаусса.
7. Бета-функция Эйлера. Различные интегральные представления, выражение через Г-функцию.

II. Локальное исследование функций. Асимптотические разложения.

8. Локальные свойства функций. Слабые отношения сравнения.
9. Сильные отношения сравнения.
10. Отношения сравнения между положительными функциями. Порядок функции относительно положительной функции. O- и o- символика.
11. Шкалы сравнения, главные части и асимптотические разложения. Определения, примеры и простейшие свойства.
12. Сумма, произведение и композиция асимптотических разложений.
13. Интегрирование сильных и слабых отношений сравнения.
14. Дифференцирование отношений сравнения.
15. Главная часть в асимптотическом разложении примитивной. Примеры.
16. Отношения сравнения для рядов с положительными членами.

17. Числа Бернулли. Формула суммирования Эйлера – Маклорена.
18. Свойства чисел и многочленов Бернулли.
19. Оценка остатка в формуле Эйлера – Маклорена. Асимптотика частичной суммы гармонического ряда.
20. Формула Стирлинга.

III. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента

21. Дифференцируемость и производная для отображений банаховых пространств. Определение, простейшие свойства, примеры, производная сложной функции.
22. Функции со значениями в произведении банаховых пространств. Частные производные, матрица Якоби.
23. Сравнение вещественной и комплексной дифференцируемости. Условия Коши – Римана.
24. Теорема о конечных приращениях. Дифференцируемость предела последовательности. Непрерывная дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные.
25. Дифференцирование по параметру интеграла с переменными пределами.
26. Теорема об обратной функции. Принцип сжимающих отображений.
27. Теорема о неявной функции. Конечномерный случай, теорема о ранге.
28. Вторая производная. Свойство симметричности, координатное описание.
29. Высшие производные. Свойства и примеры.
30. Формула Тейлора.